数理解析研究所講究録
230巻 1975年 101-106

志村の楕円曲線のある等分点が生成する代数体

京大教養部　山内正敏

§1. 志村の楕円曲線

q を $q \equiv 1 \pmod 4$ なる素数で，χ を導手 q の指標で位数2のもの，つまり $\chi(*) = \left(\frac{*}{q}\right)$，level q の合同部分群 $\Gamma_0(q)$ に関する，重さ2の指標 χ に属する Neben type の cusp forms の空間を $\mathfrak{S}_{2,\chi} = \mathfrak{S}_2(\Gamma_0(q), \chi)$ とします。今 $\mathfrak{S}_{2,\chi}$ の元 $f(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$ は，$\mathfrak{S}_{2,\chi}$ に働く全てのヘッケ作用素 $T_{m,\chi}$ の同時固有函数であるとし，K を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上フーリエ係数 a_n $(n=2,3,\cdots)$ が生成する有限次代数体とします。志村理論［1. Chap. 7］によると，この $f(z)$ に対し $\mathbb{Q}$ 上定義されたアーベル多様体 $A = A_f$ を構成出来，この A は (i) $\dim A = [K:\mathbb{Q}]$ (ii) $End_{\mathbb{Q}}(A)$ は自然に K を含む，という性質をもちます。更に重要な事に，(iii) 実2次体 $k = \mathbb{Q}(\sqrt{q})$ 上定義された A の自己同型 μ が存在し，$\mu^2 = id.$ $\mu^{\varepsilon} = -\mu$ $(id \neq \varepsilon \in gal(k/\mathbb{Q}))$ が成立します。

この μ を使って $B=(1+\mu)A$ という A のアーベル部分多様体を考えると B は $k=\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ 上定義されていて，$A \sim B \times B^{\varepsilon}$ と k 上 isogenous の意味で分解されます。B は更に k 上分解されて1次元の因子をもてば，その1次元因子の事を"志村の楕円曲線"と呼ぶことにします。特に $\dim B = 1$ の時 B 自身が志村の楕円曲線となります。こうなるのは $q=29, 37, 41$ の時に限ります。ここでは，$q=29, 37$ を扱います。以後 $\dim B=1$ とします。

l を1つの素数とし，K_l（或いは K_{l^∞}）を B の位数 l（或いは位数 l^n）の点の座標を定義体 k に添加して出来る有限次（或いは無限次）ガロワ拡大体とすると，$\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(B)=\mathbb{Q}$ ということがわかっていますから

$$R_\infty : \mathrm{Gal}(K_{l^\infty}/k) \longrightarrow GL_2(\mathbb{Z}_l)$$

$$R_1 : \mathrm{Gal}(K_l/k) \longrightarrow GL_2(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$$

なるガロワ群の表現 R_∞, R_1 が得られます。この時 R_∞, R_1 を

(*) $R_\infty(\sigma) \equiv R_1(\sigma') \pmod{l}$.（$\sigma'$ は σ の K_l への制限）

となる様にとることが出来ますからその様にとっておきます。l をある特殊な素数にした時の $\mathrm{Gal}(K_l/k)$ を決め，K_l を explicit に書くことが目的です。

素数 p（$\neq l, q$）の上にある K_l の1つの素因子を $\mathfrak{P}$，$\mathfrak{P}$ の K_{l^∞} への延長の1つを $\mathfrak{P}'$ とし，$\sigma_{\mathfrak{P}}$, $\sigma_{\mathfrak{P}'}$ を夫々のフロベ

ニウス自己同型とすると

$$(\ast\ast)\qquad \det(I_2 - XR_\ell(\sigma_p)) = \begin{cases} 1 - a_p X + pX^2 & , \quad \chi(p)=1 \\ 1-(a_p^2+2p)X + p^2X^2, & \chi(p)=-1 \end{cases}$$

となっています。[1.(7.6.15)] (∗),(∗∗) により K_ℓ/k の素イデアル分解が $a_p \pmod{\ell}$ の値でわかるわけです。

§2. a_p に関する1つの合同式（土井氏による。）

χ を今迄通りとし，$B_{n,\chi}$ を一般化されたベルヌイ数とします。つまり，

$$F_\chi(t) = \sum_{a=1}^{q} \frac{\chi(a)t\cdot e^{at}}{e^{qt}-1}$$

を母函数とし

$$F_\chi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{n,\chi}\cdot\frac{t^n}{n!}$$

で得られる数 $B_{n,\chi}$ です。この時，一般に重さ w の Neben type の cusp forms の空間 $\mathfrak{S}_w(\Gamma_0(q),\chi)$ に働くヘッケ作用素 $T_{p,\chi}$ と一般化されたベルヌイ数 $B_{w,\chi}$ との間に成りたつ次の合同式を土井氏は証明しました。(未発表)

$$(\ast\!\!\ast)\qquad \det(I + \chi(p)p^{w-1}\cdot I - T_{p,\chi}) \equiv 0 \mod \ell.$$

(ここで ℓ は有理数 $w^{-1}\cdot B_{w,\chi}$ の分子の奇素因子)

$\dim B = 1$ つまり $\dim\mathfrak{S}_{2,\chi} = 2$ の時，ヘッケ作用素 $T_{m,\chi}$ $(m=1,2,\cdots)$ についての同時固有函数 $f(z) = 1+\sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$ のフーリエ係数 a_p について土井氏の

合同式 (☆) は

$$(☆☆)\begin{cases} 1+p-a_p \equiv 0 \mod l & \text{if } \chi(p)=1 \\ (1-p)^2-a_p^2 \equiv 0 \mod l & \text{if } \chi(p)=-1 \end{cases}$$

ということを意味します。 $q=29, 37$ の時 $B_{2,\chi}$ は夫々 12, 20 ですから 上の合同式(☆☆) の l として夫々 3, 5 がとれます。 この l についての l 等分点の体 K_l をきめるわけです。

§3 K_l の決定 ($q=29, 37$ の場合)

(☆☆) の左辺は (**) の右辺に $X=1$ を代入したものですから (*) を合わせて考えると, 結局 K_l でのフロベニウス自己同型 $\sigma_{\mathfrak{p}}$ の R_1 による像 $R_1(\sigma_{\mathfrak{p}})$ は $GL_2(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ の元としていつも固有値 1 をもっています。こういう事から $R_1(Gal(K_l/k))$ が決まります。更に K_l/k での分岐の状態を調べる事により K_l を explicit に求める事が出来ます。結局まとめると,

定理　$q=29, 37$ の時 l を夫々 $l=3, 5$ として,

$$\text{(i)}\quad Gal(K_l/k) \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \;\middle|\; \begin{array}{l} b \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \\ d \in (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^\times \end{array} \right\}$$

更に K_{l^∞} についていえば,

(i)′ $Gal(K_{\ell^\infty}/k) \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}_\ell) \;\middle|\; \begin{array}{l} a-1 \in \ell\mathbb{Z}_\ell \\ c \in \ell\mathbb{Z}_\ell \\ b \in \mathbb{Z}_\ell \\ d \in \mathbb{Z}_\ell^\times \end{array} \right\}$

(ii) $K_\ell = k(\zeta_\ell, \sqrt[\ell]{\varepsilon_q})$

ここで ζ_ℓ は1の原始ℓ乗根, ε_q は $k=\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ の基本単数。

(i), (ii)についての証明は [2] にあります。(i)′については, まず $Gal(K_{\ell^2}/k)$ を決めておいて, G. Shimura, *A reciprocity law in non-solvable extensions*, J. Reine Angew. Math., 221(1966), 209–220. にある Lemma 5. を modify して得られます。

[注意]

(1). $B_{2,\chi} \equiv 0 \bmod \ell$ ですと $k(\zeta_\ell)$ の類数は ℓ で割れます。(斎藤氏に教えて頂いた。) 円分体の類数に関するクンマーのクライテリオンに相当する事実です。従って $k(\zeta_\ell)$ ~~の~~上に ℓ 次不分岐巡回拡大が存在します。$q=29$ の時 K_ℓ が丁度それになっています。しかし $q=37$ のときはそうでありません。一般に『$B_{2,\chi} \equiv 0 \bmod 5$ ならば $k(\zeta_5, \sqrt[5]{\varepsilon_{5q}})/k(\zeta_5)$ が 5次不分岐巡回拡大である。』ということがいえます。(ε_{5q}: $\mathbb{Q}(\sqrt{5q})$ の基本単数)

(2) アーベル多様体の次元＞1の時、同様な等分点についての拡大体を調べようとすると、$\mathfrak{l}$-等分点を考えるのが自然です。（$\mathfrak{l}$: a_n $(n=2,3\cdots)$ が生成する体のある素イデアル）.
すると、この時は合同式 (※) では少し不充分で、もっと精密化する必要があります。（$1+p-a_p\equiv 0 \pmod{\mathfrak{l}}$）という様な合同式の証明が必要）それらは最近、太田氏と小池氏によって独立に証明が得られています。従って $q=67, 73$ 等の Neben type についての $K_{\mathfrak{l}}$ の決定が柴原氏によって得られています。

参考文献

[1]. G. Shimura, Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Publ. Math. Soc. Japan, No.11 Iwanami Shoten and Princeton University Press, 1971.

[2]. M. Yamauchi, On the fields generated by certain points of finite order on Shimura's elliptic curves, J. Math. Kyoto Univ., 14 (1974) 243−255.